**Bài 1:**

Trong phòng họp có n người

Mỗi người trong phòng có thể quen 0, 1, 2, …, n-1 người

Không thể đồng thời tồn tại 1 người không quen ai (quen 0 người) và 1 người quen tất cả mọi người (quen n-1 người)

* Theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành n–1 nhóm
* Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 1 nhóm có ít nhất 2 người
* Luôn tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

**Bài 2:** *Trong mặt phẳng cho 6 điểm được nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 điểm sao cho các cung nối chúng có cùng một màu.*

***Giải.***

Gọi một điểm nào đó là P. Từ P có 5 cung đi ra nối với 5 điểm còn lại. Theo nguyên lý

Dirichlet trong số các cung này phải có 3 cung cùng màu, chẳng hạn màu xanh. Gọi 3

điểm được nối với cung này là A, B, C. Nếu cả 3 cung AB, AC, BC đều có màu đỏ thì

bài toán được chứng minh, trái lại có một cung nào đó màu xanh, chẳng hạn AB có màu

xanh, khi đó cả 3 cung PA, PB, AB đều có màu xanh và bài toán được chứng minh.

Trong bài toán trên, ta xem mỗi điểm như là một người và màu của cung nối hai điểm

mô tả hai trạng thái quen/không quen giữa hai người. Khi đó ta nhận được một kết quả

thú vị về mối quan hệ quen nhau, mặc dù không biết mối quan hệ đó như thế nào:

“Trong 6 người bất kỳ, luôn tìm được 3 người, hoặc tất cả đều quen nhau, hoặc không

ai quen ai cả”.

**Bài 3:**

Gọi ai là số trận thi đấu cho tới ngày thứ i của đội.

Khi đó a1, a2, . . ., a30 là dãy tăng, 1 ≤ ai ≤ 45.

🡺 dãy a1 + 14, a2 + 14, . . ., a30 + 14 là dãy tăng, 15 ≤ ai ≤ 59

🡺 dãy a1, a2, …, a30, a1 + 14, a2 + 14, . . ., a30 + 14 gồm 60 số nằm trong đoạn [1; 59]

Theo nguyên lý Dirichlet thì phải tồn tại ít nhất 2 trong số 60 số này bằng nhau.

Vì các số a1, a2, . . ., a30 là khác nhau đôi một và a1 + 14, a2 + 14, . . ., a30 + 14 cũng khác nhau đôi một

🡺Phải tồn i và j, j < i sao cho ai = aj + 14.

🡺 từ ngày thứ j+1 đến ngày i đội đã chơi đúng 14 trận

**BÀI TẬP TỔNG HỢP**

**Bài 3:** *17 nhà bác học viết thư trao đổi với nhau về 3 chủ đề, mỗi cặp chỉ trao đổi với nhau về 1 chủ đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 nhà bác học đôi một viết thư trao đổi với nhau về 1 chủ đề.*

***Giải***

Giả sử lấy 1 nhà bác học bất kì là a1 viết thư cho 16 bác học còn lại­> do có 3 vấn đề cần trao đổi nên tồn tại ít nhất 6 nhà bác học a1vấn đề 1 nào đó. Trong 6 nhà bác học trên lấy ra 1 nhà bác học bất kì là a2. 5 người còn lại nếu có 1 nhà bác học viết thư trao đổi với a2 về vấn đề 1 thì bài toán đã giải quyết. Ta xét TH2: viết thư trao đổi với 5 người về 2 vấn đề còn lại.Theo nguyên lý dicrichlet tồn tai 3 người trao đổi với a2 về vấn đề nào đó gọi là vấn đề 2.Trong 3 người trao đổi về vấn đề 2 nếu có 1 người trao đổi vấn đề 2 thì bài toán được giải.Ngược lại nếu không có ai trong 3 người đó trao đổi về vấn đề 2 thì chắc chắn họ sẽ trao đổi về vấn đề 3.=>Bài toán đãđược giải.

**Bài 4:**

n + 1 số cho n chỉ có thể dư 0, 1, . . ., n −1.

🡺Theo nguyên lý Dirichlet, phải có 2 số khi chia cho n nhận được cùng một số dư. Do

**Bài 5:**  *Một lớp gồm 45 học sinh nam và 35 học sinh nữ được xếp thành một hàng ngang. Chứng minh rằng trong hàng đó luôn tìm được hai học sinh nam mà giữa họ có đúng 8 người đứng xen vào.*

***Giải***

Gọi xi là vị trí của học sinh nam thứ i trong hàng

🡺 dãy x1, x2, x3, …, x45 là dãy tăng và 1 <= xi <= 80 (= 45 + 35)

🡺 dãy xi + 9, x2 + 9, x3 + 45, …, x45 + 9 là dãy tăng và 10 <= xi +10 <= 89

🡺 dãy x1, x2, x3, x45, x1+9, x249, x3+9, …, x45+9 gồm 90 số nằm trong đoạn [1,89]

Theo nguyên lý Dirichlet thì phải tồn tại ít nhất 2 trong số 90 số này bằng nhau.

Vì các số x1, x2, x3, …, x45 khác nhau đôi một và các số x1+9, x2-9, x349, …, x45+9 khác nhau đôi một

🡺 Phải tồn i và j, j < i sao cho xi = xj + 9.

🡺 từ vị trí j+1 đến vị trí i có 8 người ở giữa

**Bài 6:** *Chứng minh rằng trong số 10 người bất kỳ bao giờ cũng tìm được hoặc là 2 người có tổng số tuổi là chia hết cho 16, hoặc là 2 người có hiệu số tuổi chia hết cho 16.*

***Giải***

Gọi a1, ..., a10 là số dư khi lấy tuổi của 10 người này chia cho 16 => ai € {0, 1...., 15} với i = 1...10;

Chia 16 số thành 9 nhóm: {0}, {1,15}, {2,14}, {3,13}, {4,12}, {5,11}, {6,10}, {7,9}, {8}

Có 10 số mà có 9 nhóm => tồn tại ít nhất 2 số thuộc 1 nhóm

*TH1:*

2 số này thuộc nhóm gồm 1 phần tử

* Hiệu số tuổi chia hết cho 16

*TH2:*

2 số này thuộc nhóm gồm 2 phần tử

* 2 số này giống nhau => hiệu chia hết cho 16
* 2 số này khác nhau => tổng chia hết cho 16

**Bài 8:** *Cần ít nhất bao nhiêu bộ có thứ tự gồm 2 số nguyên (a, b) sao cho trong đó luôn chọn được hai bộ (c, d) và (e, f) thoả mãn c-e và d-f là các số tận cùng bằng chữ số 0?*

***Giải***

a có 10 khả năng khi chia dư cho 10

b có 10 khả năng khi chia dư cho 10

🡺Bộ (a, b) có 100 khả năng khi chia dư cho 10

🡺Cần ít nhất 101 bộ để có ít nhất 2 bộ có cùng khả năng khi chia dư cho 10

Gọi 2 bộ đó là (c, d) và (e, f), khi đó c – d và e – f có tận cùng là 0

Bài 10: